Determining all elliptic curves with good reduction outside a given set of primes (Towards new development of mathematics via computational algebra system)

AUTHOR(S):

筒石, 奈央

CITATION:

筒石, 奈央. Determining all elliptic curves with good reduction outside a given set of primes (Towards new development of mathematics via computational algebra system). 数理解析研究所講究録 2016, 2012: 72-80

ISSUE DATE:

2016-12

URL:

http://hdl.handle.net/2433/231620

数理解析研究所講究録
第2012巻 2016年 72-80

Determining all elliptic curves with good reduction outside a given set of primes

津田塾大学 後期博士課程4年* 筒石奈央

1. Introduction

楕円曲線の reduction について次が知られている.

定理 1.1. 代数体 K と, 整数環 $\mathcal{O}_K$ の素イデアルの有限集合 S に対して, S に属さない全ての素イデアルで *good reduction* をもつ K 上の楕円曲線の同型類の集合

$$\mathcal{E}_K^S = \left\{ S \text{の外 } \textit{good reduction} \text{をもつ } K \text{上の楕円曲線} \right\}$$

は有限集合.

これを受けて, 次の問題を考える.

問題 1.2. 与えられた K と S に対して, $\mathcal{E}_K^S$ を決定せよ.

本稿では, $\mathcal{E}_K^S$ を決定するアルゴリズムを与える.

2. $\mathcal{E}_K^S$ の決定アルゴリズムの概要

本稿で与えるアルゴリズムの大きな枠組みは次である.

1. S の外 good reduction をもつ K 上の楕円曲線の j 不変量の集合

$$j(\mathcal{E}_K^S) = \{j(E) : E \in \mathcal{E}_K^S\}$$

を含む有限集合 J_K^S を, いくつかの K の拡大体上の S-単数方程式の解を用いて構成する.

2. 各 $j \in J_K^S$ に対して, $j(E) = j$ となる K 上の楕円曲線 E で $E \in \mathcal{E}_K^S$ となるものを全て求める.

---

*講演時

実は, $\mathcal{E}_K^S$ を決定するアルゴリズムとして, Cremona-Lingham によるもの ([2]) が既に知られている. 彼らの方法では, K 上のある楕円曲線の整数点を全て求めることでステップ 1 のような $j(\mathcal{E}_K^S)$ を含む有限集合が作られる. しかし, そのような整数点を全て求めること自体が難しく, 任意の体 K で求まるわけではない. 一方我々の方法では, K のいくつかの拡大体上の S-単数方程式の解を用いて $j(\mathcal{E}_K^S)$ を含む有限集合 J_K^S を構成する. S-単数方程式を解くアルゴリズムはあり ([7]), これも任意の体で解けるわけではないが, 単数群のランクがある程度小さければ計算可能である. 特に $S=\emptyset$ の場合は単数群のランクが 10 以下のとき, Magma([1]) の既存のコマンド UnitEquation で計算ができる. 4 章で, この場合に我々のアルゴリズムを実装したプログラムを用いた $\mathcal{E}_K^{\emptyset}$ の決定例をいくつか紹介する.

ステップ 1 ついては 3 章で詳しく述べるが, ステップ 2 についてはここで簡単に説明する. $j \in K$ に対して, E_j を Weierstrass 方程式

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3j(j-1728)d^2x - 2j(j-1728)^2d^3 & (\text{if } j \neq 0, 1728), \\ y^2 = x^3 - dx & (\text{if } j = 1728), \\ y^2 = x^3 - d & (\text{if } j = 0) \end{cases} \tag{1}$$

で定義される K 上の楕円曲線とし, $n_j \in \mathbb{Z}$, E_j を次のように定義する.

$$n_j = \begin{cases} 2 & (\text{if } j \neq 0, 1728), \\ 4 & (\text{if } j = 1728), \\ 6 & (\text{if } j = 0). \end{cases}$$

すると, j を j 不変量にもつ楕円曲線は, E_j の n_j 次 twist $E^{(d)}$ $(d \in K^\times/(K^\times)^{n_j})$ になるが (cf. [4, Proposition X.5.3, X.5.4]), $E^{(d)}$ が S の外 good reduction をもつと仮定すると, d として $K^\times/(K^\times)^{n_j}$ のある有限部分集合の元のみを考えれば十分になる (cf. [2]). その有限個の d に対して, $E^{(d)}$ が S の外 good reduction をもつかを調べ, ステップ 2 の楕円曲線を得る.

3. J_K^S の決定方法

3.1. Admissible 曲線

E が位数 2 の K 有理点を持つとき, つまり $E(K)[2] \neq \{0\}$ が成り立つとき, E を admissible 曲線と呼ぶ. また,

$$\mathcal{E}_K^{S,\mathrm{ad}} = \{E \in \mathcal{E}_K^S : E(K)[2] \neq \{0\}\}$$

とおく.

筆者は, [5] で $\mathcal{E}_K^{\emptyset} = \emptyset$ となるための 3 次体 K についての条件を与えたが, その証明の中で admissible 曲線について次を示した.

命題 3.1 ([5, Proposition 3.2.]). K を次を満たす 3 次体とする.

(i) 2はKで不分岐,

(ii) Kの狭義類数は6と素.

このとき$E \in \mathcal{E}_K^{\emptyset,\mathrm{ad}}$ならば, Kの単数x, yで

$$x + 16y = 1 \text{ または } x + y = 1$$

を満たし,

$$j(E) \in \left\{ \frac{(x+2^8y^2)^3}{x^2y^2}, \frac{2^4(x+2^4y^2)^3}{x^2y^2}, \frac{(1+2^4xy)^3}{x^2y^2}, \frac{2^8(1+xy)^3}{x^2y^2} \right\}$$

となるものが存在する.

K, Sが一般の場合でも, 命題3.1のように$E \in \mathcal{E}_K^{S,\mathrm{ad}}$に対応するいくつかの$S$-単数方程式が取れ, $j(E)$はその単数解で与えられることが、次のようにして分かる。

まず, $E \in \mathcal{E}_K^S$ のWeierstrass方程式の判別式について, 次が成り立つ.

命題 3.2. S-イデアル類群$C_{K,S}$の12倍写像の核$C_{K,S}[12]$の代表系$\mathcal{C}$を固定する. $E \in \mathcal{E}_K^S$とすると, Eは判別式Δが

$$\Delta \mathcal{O}_{K,S} \in \mathcal{C}^{12} = \{\mathfrak{C}^{12} : \mathfrak{C} \in \mathcal{C}\}$$

を満たす$\mathcal{O}_{K,S}$係数の*Weierstrass*方程式をもつ. ただし, $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x)$は$x \in K$の$\mathfrak{p}$指数を表すとし, $\mathcal{O}_{K,S} = \{x \in K : \text{全ての } \mathfrak{p} \notin S \text{ について } \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0\}$とおく.

$C_{K,S}[12]$の代表系$\mathcal{C}$を固定し, $E \in \mathcal{E}_K^{S,\mathrm{ad}}$とする. 命題3.2のように, $\Delta\mathcal{O}_{K,S} \in \mathcal{C}^{12}$となる$E$のWeierstrass方程式をとる. Eはadmissibleより,

$$y^3 = x^3 + Ax^2 + Bx \ (A, B \in \mathcal{O}_{K,S}) \tag{2}$$

という形のWeierstrass方程式に変換できる. この変換で判別式は2^{12}倍されることより

$$B^2(A^2 - 4B) = 2^8\Delta \tag{3}$$

が成り立つので, $\alpha_1 = \frac{AB}{\sqrt{\Delta}} + 2^4$, $\alpha_2 = \frac{AB}{\sqrt{\Delta}} - 2^4$とおくと,

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{A^2B^2 - 2^4\Delta}{\Delta} = \frac{4B^3}{\Delta}, \tag{4}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2^5, \tag{5}$$

$$j(E) = \frac{\left(2^4(A^2-3B)\right)^3}{2^{12}\Delta} = \frac{\left(2^8 + \frac{B^3}{\Delta}\right)^3}{\left(\frac{B^3}{\Delta}\right)^2} = \frac{(2^{10} + \alpha_1\alpha_2)^3}{(2\alpha_1\alpha_2)^2} \tag{6}$$

を得る. これらのことから, $j(E)$を含む集合$J_K^{S,\mathrm{ad}}$が次のように定義される.

定義 3.3. $\mathfrak{D} \in \mathcal{C}^{12}$ に対して

$$\mathcal{F}_{K,\mathfrak{D}} = \left\{ K\left(\sqrt{\delta}\right) : \delta \in \mathcal{O}_{K,S} \text{は} \mathfrak{D} \text{の生成元} \right\},$$

$F \in \mathcal{F}_{K,\mathfrak{D}}$ に対して

$$B_{F/K,\mathfrak{D}} = \left\{ \mathfrak{B} \in P_S : \ 0 \le \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{B}) \le \frac{1}{2}\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}\left(2^8\mathfrak{D}\right) \ \textit{for all}\ \mathfrak{p} \notin S \right\}$$

とおく。ただし, P_S は $\mathcal{O}_{K,S}$ の単項イデアル全体を表す.

$F \in \mathcal{F}_{K,\mathfrak{D}}$ に対して

$$S_F = \{\mathcal{O}_F \text{のイデアル} \mathfrak{P} : \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{p}) > 0, \mathfrak{p} \in S\},$$

$\mathfrak{B} \in B_{F/K,\mathfrak{D}}$ に対して

$$A_{\mathfrak{B}} = \left\{ (\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}^{-6}, \mathfrak{C}_2\mathfrak{D}^{-6}) : \ \mathfrak{C}_i \in P_{S_F} (i = 1, 2), \mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}^{12} = 4\mathfrak{B}^3 \right\},$$

$\mathfrak{A}_F = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \in A_{\mathfrak{B}}$ に対して

$$U_{\mathfrak{A}_F} = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in F^2 : \ \alpha_i\mathcal{O}_{F,S_F} = \mathfrak{A}_i (i = 1, 2), \alpha_1 - \alpha_2 = 2^5\},$$

$$J_{K,\mathfrak{A}_F} = \left\{ \frac{(2^{10} + \alpha_1\alpha_2)^3}{(2\alpha_1\alpha_2)^2} : \ (\alpha_1, \alpha_2) \in U_{\mathfrak{A}_F} \right\} \cap K$$

とおく. そして

$$J_K^{S,\mathrm{ad}} = \bigcup_{\mathfrak{D} \in \mathcal{C}^{12}} \bigcup_{F \in \mathcal{F}_{K,\mathfrak{D}}} \bigcup_{\mathfrak{B} \in B_{F/K,\mathfrak{D}}} \bigcup_{\mathfrak{A}_F \in A_{\mathfrak{B}}} J_{K,\mathfrak{A}_F}$$

とおく.

このとき, 次が成り立つ.

定理 3.4. **(i)** $J_K^{S,\mathrm{ad}}$ は K と S にのみ依存する有限集合,

(ii) $E \in \mathcal{E}_K^{S,\mathrm{ad}}$ ならば $j(E) \in J_{K,S}^{\mathrm{ad}}$.

Proof. (i) 定義より $\mathcal{C}^{12}, B_{F/K,\mathfrak{D}}, A_{\mathfrak{B}}$ が有限集合なのは明らか. $\mathfrak{D} \in \mathfrak{C}^{12}$ に対して $\mathfrak{D}$ の生成元 $\delta \in \mathcal{O}_{K,S}$ を固定すると, 各 $F \in \mathcal{F}_{K,\mathfrak{D}}$ は K の単数 u によって $F = K(\sqrt{\delta u})$ で与えられる. したがって $\mathcal{F}_{K,\mathfrak{D}}$ は $\mathcal{O}_K^\times/(\mathcal{O}_K^\times)^2$ と一対一対応するので, 有限集合. $\mathfrak{A}_F = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2) \in A_{\mathfrak{B}}$ に対して $\mathfrak{A}_i$ の生成元 $\gamma_i \in \mathcal{O}_{F,S_F}$ を固定すると, $\mathfrak{A}_i$ のその他の生成元は S_F-単数 $x_i \in \mathcal{O}_{F,S_F}^\times = \{x \in K : \text{全ての} \mathfrak{p} \notin S \text{に対して } \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(x) = 0\}$ によって r_ix_i で与えられるので

$$U_{\mathfrak{A}_F} = \{(\gamma_1x_1, \gamma_2x_2) : x_i \in \mathcal{O}_{F,S_F}^\times, \gamma_1x_1 - \gamma_2x_2 = 2^5\}$$

と表せる. ここで, S_F-単数方程式 $\gamma_1x_1 - \gamma_2x_2 = 2^5$ は有限個の解しか持たないので ([4, Theorem IX.4.1]), $U_{\mathfrak{A}_F}$ も有限集合. したがって, $J_K^{S,\mathrm{ad}}$ は有限集合.

(ii) 上の説明のように E の Weierstrass 方程式 (2) をとると, $\mathfrak{D} = \Delta\mathcal{O}_{K,S} \in \mathcal{C}^{12}$, $F = K(\sqrt{\Delta}) \in \mathcal{F}_{K,\mathfrak{D}}$. また, 式 (3),(4),(5) より, $\mathfrak{B} = B\mathcal{O}_{K,S} \in B_{F/K,\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{A}_F = (\alpha_1\mathcal{O}_{F,S_F}, \alpha_2\mathcal{O}_{F,S_F}) \in A_{\mathfrak{B}}$, $(a_1, a_2) \in U_{\mathfrak{A}_F}$, $j(E) \in J_{K,\mathfrak{A}_F}$ が成り立つ. したがって, $j(E) \in J_K^{S,\mathrm{ad}}$. □

3.2. Non-admissible 曲線

ここでは, $E \in \mathcal{E}_K^S$ が non-admissible の場合, つまり,

$$E \in \mathcal{E}_K^{S,\mathrm{nad}} = \mathcal{E}_K^S \setminus \mathcal{E}_K^{S,\mathrm{ad}} = \{E \in \mathcal{E}_K^S : E(K)[2] = \{0\}\}$$

となる場合に, $j(E)$ を含むような集合 $J_K^{S,\mathrm{nad}}$ を定義する.

$E \in \mathcal{E}_K^{S,\mathrm{nad}}$ とする. 位数 2 の E 上の点 $P = (p_1, p_2) \in \overline{K} \times \overline{K}$ を取ると, $K(P) = K(p_1, p_2)$ は K 上 3 次拡大体になり, E を $K(P)$ 上の曲線とみなすと明らかに E は $S_{K(P)}$ の外 good reduction をもち, $K(P)$ 上 admissible, つまり $E(K(P))[2] \neq \{0\}$ となる. したがって,

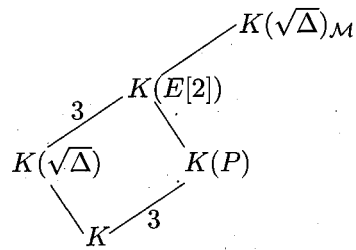
$$j(E) \in J_{K(P)}^{S_{K(P)},\mathrm{ad}} \cap K$$

となる. ここで $K(P)$ が満たす条件をみていくと, まず, $K(P)$ は E の位数 2 の点の座標を全て K に添加した体 $K(E[2])$ の K 上 3 次部分体であり, $K(E[2])$ は $K(P)/K$ の Galois closure になっている. また, $K(E[2])/K(\sqrt{\Delta})$(Δ は E を定める任意の Weierstrass 方程式の判別式) の分岐は次のように制限される.

命題 3.5 (cf. [4, Proposition VII.4.1]). $E \in \mathcal{E}_K^{S,\mathrm{ad}}$ とし, E の *Weierstrass* 方程式の判別式を Δ とおく. この時, $K(E[2])/K(\sqrt{\Delta})$ は $S' = S_{K(\sqrt{\Delta})} \cup \{\mathfrak{p} : \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(2) > 0\}$ の外不分岐な 3 次巡回拡大. したがって, $K(E[2])$ は $K(\sqrt{\Delta})$ の *mod* $\mathcal{M} = \prod \mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}}$ $\left(\mathfrak{P} \in S'_{K(\sqrt{\Delta})}\right)$ の *ray class field* $K(\sqrt{\Delta})_{\mathcal{M}}$ の $K(\sqrt{\Delta})$ 上 3 次部分体. ただし,

$$e_{\mathfrak{P}} = \begin{cases} \lfloor \frac{3\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(3)}{2} \rfloor + 1 & \textit{if } \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(3) > 0, \\ 1 & \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{7}$$

特に, $K(\sqrt{\Delta})$ の mod $\mathcal{M}$ の *ray class group* $\mathcal{C}_{K(\sqrt{\Delta})}^{\mathcal{M}}$ の位数は 3 の倍数.



定義 3.6. $\mathfrak{D} \in \mathcal{C}^{12}$ に対して

$$\mathcal{F}'_{K,\mathfrak{D}} = \{F \in F_{K,\mathfrak{D}} : \mathcal{C}_F^{\mathcal{M}} \text{ の位数は 3 で割り切れる }\},$$

$F \in \mathcal{F}'_{K,\mathfrak{D}}$ に対して

$$\mathcal{L}_{F/K} = \{L : K \subset L \subset F_{\mathcal{M}}, \textit{deg}(L/K) = 3, FL \text{ は } L/K \text{ の } \textit{Galois closure}\}$$

とおく.

このとき, 命題3.5より

$$K(P) \in \bigcup_{\mathfrak{D}\in\mathcal{C}^{12}} \bigcup_{F\in\mathcal{F}'_{K,\mathfrak{D}}} \mathcal{L}_{F/K}$$

となるので, $J_K^{S,\mathrm{nad}}$ は次のように定義できる.

定理 3.7.

$$J_K^{S,\mathrm{nad}} = \bigcup_{\mathfrak{D}\in\mathcal{C}^{12}} \bigcup_{F\in\mathcal{F}'_{K,\mathfrak{D}}} \bigcup_{L\in\mathcal{L}_{F/K}} J_L^{S_L,\mathrm{ad}} \cap K$$

とおく.

(i) $J_K^{S,\mathrm{nad}}$ は K と S にのみ依存する有限集合,

(ii) $E \in \mathcal{E}_K^{S,\mathrm{nad}}$ ならば $j(E) \in J_K^{S,\mathrm{nad}}$.

定理3.4と3.7より, $j(\mathcal{E}_K^S)$ を含む有限集合 J_K^S を得る.

系 3.8. $J_K^S = J_K^{S,\mathrm{ad}} \cup J_K^{S,\mathrm{nad}}$ とおく.

(i) J_K^S は K と S にのみ依存する有限集合,

(ii) $E \in \mathcal{E}_K^S$ ならば $j(E) \in J_K^S$.

4. 例

$\mathcal{E}_K^{\emptyset}$ に属する楕円曲線, つまり全ての素イデアルで good reduction をもつ楕円曲線を, K 上の EGR 曲線と呼ぶ.

ここでは、Magma に用意されている単数方程式を解く既存のコマンド (UnitEquation) を用いて決定された EGR 曲線の例をいくつか紹介する. なお, ここでの計算は Magma Ver.2.21-4 を用いている.

4.1. $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}+\sqrt{-6})$

$K = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{-2}+\sqrt{-6})$ とおく (α は x^4+16x^2+16 の根). K の3つの2次部分体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 上, EGR 曲線は存在しないが, K 上は EGR 曲線が存在することが示される.

命題 4.1. *K 上の EGR 曲線は同型を除いて2曲線存在し, それは j 不変量が 8000 の Weierstrass 方程式*

$$y^2 = x^3 - 120\alpha^2 x \pm 448\alpha^3$$

で与えられる.

K の類数は 2 で, イデアル類群は 2 の上の素イデアル $\mathfrak{p}$ $(2\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^4)$ で生成される. $\mathcal{C}^{12} = \{\mathcal{O}_K, 8\mathcal{O}_K\}$ とおくと, $\mathcal{F}_{K,\mathcal{O}_K} = \{K, K(\sqrt{-1}), K(\sqrt{\pm 2\alpha})\}$, $\mathcal{F}_{K,8\mathcal{O}_K} = \mathcal{F}_{K,\mathcal{O}_K} \cup \{K(\sqrt{\pm 2}), K(\sqrt{\pm\alpha})\}$ となる. $F \in \mathcal{F}_{K,8\mathcal{O}_K}$ の modulo 2 の ray class number を計算すると, どれも 3 で割れないので, $\mathcal{F}'_{K,\mathcal{O}_K} = \mathcal{F}'_{K,8\mathcal{O}_K} = \emptyset$ となる. したがって, K 上の EGR 曲線は admissible である. つまり $\mathcal{E}_K^{\emptyset} = \mathcal{E}_K^{\emptyset,\mathrm{ad}}$ が成り立つ. $j = 8000$ は, $F = K(\sqrt{-1})$ 上の単数方程式 $x - y = 2$(解は 35 個存在) の解から構成される.

4.2. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{46})$

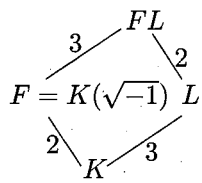
横山氏は [8] で $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{46})$ 上の EGR 曲線として $j(E) = -9936$ であるものを見つけているが, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{46})$ 上の EGR 曲線はその曲線のみであることが示される.

命題 4.2. *$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{46})$ 上の EGR 曲線は同型を除いてただ一つで, その楕円曲線は j 不変量 -9936 を持ち, Weierstrass 方程式*

$$y^2 = x^3 - 2\sqrt[3]{46}x - 8$$

で定義される.

上の曲線は non-admissible 曲線で, $F = K(\sqrt{-1})$ の mod 2 の ray class field の K 上 3 次部分体 L 上の admissible EGR 曲線になっており, j 不変量は 18 次体 FL(単数群のランク 8) の単数方程式の解から計算される.



4.3. EGR 曲線の族

[6] で任意の次数 ≥ 3 の体上定義される次の EGR 曲線の無限族が構成されている.

命題 4.3. *$n, a \in \mathbb{Z} (n \geq 2)$ とし, ϵ を*

$$g_{n,a}(x) = x^n - 16^{n-2}(a-16)x^{n-1} + ax - 1$$

の根とする. このとき, $g_{n,a}(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約で, 楕円曲線

$$\begin{aligned}
E_1 &: y^2 + xy = x^3 + 16\epsilon x^2 + 8\epsilon x + \epsilon, \\
E_2 &: y^2 + xy = x^3 - 8\epsilon x^2 + 2\epsilon(8\epsilon - 3)x + \epsilon(4\epsilon - 1), \\
E_3 &: y^2 + xy = x^3 - 8\epsilon x^2 + \epsilon(16\epsilon - 1)x, \\
E_4 &: y^2 + xy = x^3 - 2\epsilon x^2 + \epsilon^2 x
\end{aligned}$$

は $\mathbb{Q}(\epsilon)$ 上の EGR 曲線.

証明の概略 $g_{n,a}(x)$ の既約性は, Perron の既約性定理 ([3, Theorem 2]) から従う. $g_{n,a}(x)$ の定数項が単数より, ϵ は明らかに単数だが, $1-16\epsilon$ の絶対ノルムを計算すると 1 となり $1-16\epsilon$ も単数であることが分かる. したがって, Weierstrass 方程式の判別式は上から $\epsilon(1-16\epsilon), \epsilon(1-16\epsilon)^4, \epsilon^2(1-16\epsilon)^2, \epsilon^4(1-16\epsilon)$ となり, どれも単数なので $E_i (i=1,2,3,4)$ は EGR 曲線. □

類数が 1 で, 比較的判別式の絶対値が小さい $(n,a)=(3,19),(4,16)$ の場合に, EGR 曲線を決定した.

命題 4.4. 多項式

$$g_{3,19}(x) = x^3 - 48x^2 + 19x - 1,$$
$$g_{4,16}(x) = x^4 + 16x - 1$$

で定義される体 K 上, *EGR* 曲線はちょうど 8 曲線ずつ存在し, 上の多項式の根を $\epsilon \in K$ とおくと, *EGR* 曲線 $E_i, E_i' (i=1,2,3,4)$ の j 不変量は

$$\begin{aligned}
j(E_1) = j(E_1') &= 4124\epsilon^2 - 197943\epsilon + 66391, \\
j(E_2) = j(E_2') &= 218300419\epsilon^2 - 10461642895\epsilon + 3492807433, \\
j(E_3) = j(E_3') &= 9788250386431\epsilon^2 - 3902514659536\epsilon + 205621494493, \\
j(E_4) = j(E_4') &= 619787628373344257\epsilon^2 - 29711081063503953712\epsilon \\
&\quad +9919579807195071219
\end{aligned}$$

で与えられる.

参考文献

[1] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust: *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput. 24 (1997), 235–265.

[2] J. Cremona and M. Lingham: *Finding all elliptic curves with good reduction outside a given set of primes*, Exp. Math. 16 No.3 (2007), 303–312.

[3] O. Perron: *Neue Kriterien für die Irreduzibilität algebraischer Gleichungen*, J. Reine Angew. Math., 132 (1907), 288–307.

[4] J. H. Silverman: *The Arithmetic of Elliptic Curves* (2nd edition), Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer-Verlag, New York, 2009.

[5] N. Takeshi: *Elliptic curves with good reduction everywhere over cubic fields*, Int. J. Number Theory, vol. 11, no. 04 (2015), 1149–1164.

[6] N. Takeshi: *Family of elliptic curves with good reduction everywhere over number fields of given degree*, preprint.

[7] K. Wildanger: *Über das Lösen von Einheiten- und Indexformgleichungen in algebraischen Zahlkörpern* (*On the solution of units and index form equations in algebraic number fields*), J. Number Theory 82 (2000), no. 2, 188–224.

[8] S. Yokoyama: *On elliptic curves with everywhere good reduction over certain number fields*, American J. Comput. Math (2012), vol. 2, no. 4, 358–366.